

Jugar a crear solucions

Albert Mallart Solaz

Institut d'Educació Secundària (IES) Príncep de Girona
 Departament de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals
 Facultat d'Educació, Universitat de Barcelona
 alberto.mallart@gmail.com

Resum

L'ensenyament de les matemàtiques hauria d'ajudar les persones a ser competents matemàticament en la seva vida quotidiana. No n'hi ha prou d'ensenyar un llenguatge, unes definicions i uns processos. Són necessàries les reflexions profundes que aconseguen passar de la comprensió a l'assimilació. Una via per a aconseguir aquest propòsit és mitjançant la resolució de problemes. Existeix una millor manera d'aprendre que jugar? Aquest article presenta un treball amb les recreacions matemàtiques com una estratègia engrescadora seguint una metodologia determinada. S'ha dut a terme amb tres grups d'alumnes de quart d'ESO d'un institut públic de Barcelona. Es constata una gran acceptació d'aquesta pràctica i una millora en l'atenció i l'anotació inicial sobre el conjunt de dades dels enunciats (resolucions escrites d'exàmens posteriors). Encara que les qualificacions dels alumnes en la resolució de problemes no millori, es constata que existeix un cert esperit crític davant la solució trobada i un interès per entendre-la (resolucions escrites amb comprovacions).

Abstract

Teaching mathematics should help us to be mathematically competent in our daily lives. It is not just a matter of teaching a language, definitions and processes. Deep thinking is required to go from comprehension to assimilation. One way to achieve this is through problem-solving. Is there a better way to learn than playing? This paper presents a motivating methodology of working with recreational mathematics. The experience has been carried out with 16-year-old students at a public high school in Barcelona. It is clear that this working method is well received by students. An improvement is observed with respect to paying attention and writing down the data of statements (written answers to later exams confirm this). Although the grades in problem-solving do not improve, results reflect students developing a critical eye when coming up with solutions and they show an interest in understanding the answers provided (written answers including verifications are collected).

Introducció

La resolució de problemes es pot considerar un eix transversal del currículum de matemàtiques en l'educació secundària obligatòria. Ha de constituir un nucli fonamental de l'aprenentatge

matemàtic. Les matemàtiques han d'aportar una manera d'afrontar les situacions conflictives del món que ens envolta. És a dir, cal saber aplicar les matemàtiques a situacions quotidianes i això es reflecteix en una inclusió en el disseny de currículums. L'informe de l'any 2003 d'OCDE/PISA és redactat sobre el Programa Internacional d'Avaluació d'Estudiants emparat per la Unesco i l'Organització per a la Cooperació i el Desenvolupament Econòmic. Aquest informe reflecteix la definició de competència matemàtica següent:

La competència matemàtica és la capacitat d'un individu d'identificar i entendre el rol que juguen les matemàtiques en el món, emetre judicis ben fonamentats i utilitzar les matemàtiques en formes que li permetin satisfer les seves necessitats com a ciutadà constructiu, compromès i reflexiu (www.pisa.oecd.org).

L'esquema matemàtic de l'OCDE/PISA situa la definició de competència o «alfabetisme» matemàtic. La capacitat de llegir, escoltar, escriure i parlar un llenguatge són les eines més importants de la societat humana. Les matemàtiques es poden considerar un llenguatge; s'han de conèixer els elements fonamentals del discurs matemàtic (termes, símbols, signes, procediments...) i saber aplicar-los a la resolució de problemes sorgits de diverses situacions reals.

Els intents pràctics de proposar la resolució de problemes com a eix de l'ensenyament de les matemàtiques responen a tres interpretacions: 1) Ensenyar per resoldre (s'aprèn fent moltes resolucions i s'aprenen tècniques, mètodes i eines heurístiques); 2) Ensenyar sobre la resolució de problemes; 3) Ensenyar mitjançant la resolució de problemes (amb problemes generadors de teoria o bé extraient el màxim profit de cada problema).

Quant a la segona interpretació, ensenyar sobre la resolució de problemes, no n'hi ha prou de resoldre, cal una reflexió. El currículum preveu la reflexió sobre les tècniques que permeten resoldre problemes. Els problemes s'escullen per a aplicar una determinada eina heurística o, en paraules de Kilpatrick (1985), els procediments de representació i transformació dels problemes. Carrillo (1996) considera que un heurístic és una insinuació o suggeriment general o estratègia, independent de qualsevol tòpic particular o matèria d'estudi, que ajuda el resolutor a aproximar-se a un problema i a comprendre'l, i a endreçar eficientment els seus recursos per tal de resoldre'l.

Aprenent a resoldre problemes

L'aprenentatge de les matemàtiques es pot focalitzar a transmetre als alumnes aquelles idees, estratègies, processos i actituds que s'han mostrat útils i eficaces per resoldre problemes. Les propostes per a aquest tipus d'aprenentatge barregen diferents elements que Kilpatrick (1985) sintetitzà en cinc punts: *a*) Osmosi: se'ls pot submergir en un ambient de resolució de problemes adequat perquè practiquin; *b*) Memorització: es consideren models basats en l'enfocament conductista, però no es pot utilitzar amb problemes en què no s'apliquen els procediments ensenyats; *c*) Imitació: és una forma d'ensenyar a analitzar les conductes i els comportaments de models competents en resolució de problemes, però la resolució és molt personal i es barregen preferències, capacitats i limitacions amb el model; *d*) Cooperació: no només han de ser capaços d'observar i analitzar conductes per imitar-les, sinó també d'observar i analitzar les dels seus companys per cooperar-hi, i *e*) Reflexió: s'aprèn practicant puntualment i global sobre tot allò que es fa.

D'una altra banda, Abrantes i Serrazina (1996) subratllen la importància de la motivació com a eix fonamental per tirar endavant un bon aprenentatge de les matemàtiques quan parlen de la resolució de problemes com a ambient i com a naturalesa d'activitats d'aprenentatge. Busquen un clima educatiu que afavoreixi la confiança de cada alumne en les seves pròpies capacitats d'aprenentatge, en el seu propi criteri, en què no tenen por d'equivocar-se, canviar raonadament d'opinió o dir que no ho saben; un ambient en què s'ho passin bé amb els reptes i amb la pròpia activitat intel·lectual, en què es valorin els processos i els progressos de cada alumne i no només les seves respostes, en què s'examinin més d'un punt de vista per abordar o solucionar un problema, en què es formulin preguntes pertinents entorn de les situacions i es tingui cura de les generalitzacions i en què es revisin les pròpies creences. Aquest ambient d'aprenentatge exigeix una determinada formació del professorat, així com certes actituds i creences.

Descripció d'algunes experiències didàctiques

A continuació, es detallen quatre activitats pràctiques dutes a terme a l'IES Príncep de Girona amb tres grups d'alumnes de 4t d'ESO durant el primer i el segon trimestre del curs 2015-2016. S'ha aconseguit un ambient de resolució de problemes adient a l'aula en el sentit expressat per Abrantes i Serrazina (1996) i en què els cinc punts destacats per Kilpatrick (1985) són tractats.

Totes les activitats escollides que pertanyen a un quadern d'activitats sempre en construcció (Mallart, 2008) s'han extret de diverses fonts: revistes de lògica mensuals, llibres d'enigmes i jocs matemàtics com per exemple l'obra de Segarra (2001) i part de saviesa popular aportada de vegades pels mateixos alumnes. Seguint les activitats es detallen l'objectiu, unes possibles orientacions didàctiques a tenir presents i la temporització. La seva pràctica ocupa un dia a la setmana durant tot el curs.

Prova de golf

En Walter és convidat a seure en el club esportiu de Dinamarca i a assistir a l'Open de golf. Ha de relacionar correctament les dades de tots els participants a partir de les pistes facilitades.



1. L'esportista de 25 anys es classificà abans que Mr. Pinter.
2. El veneçolà va donar dos cops més que el jugador de 23 anys.
3. L'esportista de 28 anys i el que donà 139 cops no estan conformes amb el terreny.
4. Els dos primers classificats han donat 134 i 136 cops, respectivament.
5. L'esportista espanyol vesteix de blanc.
6. El de 26 anys viu amb la seva mare.
7. El francès donà dos cops més que Mr. Pinter.
8. W. Rood fou campió mundial fa molt de temps.

9. A. Lowin quedà pitjor classificat que l'esportista veneçolà.
10. Aquell qui donà 137 cops i l'esportista de 25 anys utilitzen sabates sud-africanes.
11. D. Vara quedà pitjor classificat que l'esportista suís.

Resposta:

<i>Esportista</i>	<i>Edat</i>	<i>Nacionalitat</i>	<i>Marca</i>
W. Rood	23	suís	134
D. Vara	25	veneçolà	136
M. Pinter	28	espanyol	137
A. Lowin	26	francès	139

- *Objectiu:* El desenvolupament d'estratègies per estar atents i ser precisos en recollir tota la informació donada.
- *Orientacions didàctiques:* L'alumne llegirà individualment l'enunciat per tal que pugui reorganitzar com desitgi tota la informació. El grup serà guiat pel professor corregint la graella amb les dades adients. La correcció mai serà imposada, sinó raonada pels alumnes i supervisada sempre pel professor. El professor insistirà en la importància de dedicar temps a capturar totes les dades donades d'una manera ordenada i precisa.
- *Temporització:* Vint minuts.

Tallar una peça de roba

Cal tallar una peça de roba per a fer-ne banderoles. Si es talla en peces de 3 m de llarg, en sobren 2 m; si es talla en peces de 4 m, en sobren 3 m, i si les peces són de 5 m, en sobren 4 m. Si se sap que la peça té menys de 75 m, pots dir la seva longitud?

Resposta: El nombre és 59.



- *Objectiu:* El desenvolupament de la intuïció i la perspicàcia a partir d'una captura de dades exhaustiva. També es busca la superació de certs bloquejos mentals i falses hipòtesis i paradoxes.
- *Orientacions didàctiques:* L'alumne escoltarà molt atent les dades que es llegiran. Restarà en silenci absolut, pensatiu. El professor, sense donar pistes, temptejarà mitjançant preguntes si la majoria l'ha resolt amb èxit. En cas contrari, el professor tornarà a llegir, però emfasitzant les dades. A continuació s'aplicarà un *brainstorming* guiant l'aparició d'idees cap a la resposta. En finalitzar, el professor comprovarà que tothom ho hagi entès preguntant sobre altres possibles respostes.
- *Temporització:* Depèn dels estudiants. El que importa és que pensin i arribin a conclusions encara que sigui guiats. Les indicacions poden suggerir d'una manera més o menys rà-

vida la solució segons les diferents realitats de cada alumne. Com que es tracta d'un treball en grup, en la fase final la temporització anirà lligada al grup. Una orientació temporal seria cinc minuts per a pensar individualment i deu per a pensar en grup.

El problema de l'herència dels camells

Un pare deixà en herència 17 camells als seus 3 fills. Al fill gran li'n deixà la meitat; al mitjà, la tercera part, i al petit, la novena part. No sabien com fer el repartiment. Un viatger que anava en camell es va oferir a ajudar-los a canvi d'una gran suma de diners. Els fills van accedir. El viatger els presentà la seva solució, que consistí a donar-los el seu camell. Ara hi havia un total de 18 camells i podien fer les reparticions: 9 camells per al fill gran, 6 per al mitjà i 2 per al petit. De fet, tots hi sortien guanyant, i la suma feia 17. Aleshores el viatger va demanar que se li tornés el seu camell i que se li pagués la suma de diners. Tots van quedar bocabadats. Què havia passat? Màgia?



Resposta: El nombre 17 no és divisible ni per 2, ni per 3, ni per 9 i cap fill està disposat a sacrificar cap camell. Abans que vingués el viatger, els corresponien $8 + 1/2$, $5 + 2/3$ i $1 + 8/9$ camells. Després els en corresponen 9, 6 i 2 i, per tant, hi surten guanyant (però no hi guanyen igual: el fill gran en guanya $1/2$, el mitjà $1/3$ i el petit $1/9$). La repartició inicial no dona 17, ja que $17/2 + 17/3 + 17/9 = 17 \cdot 17/18$; falta $1/18$ dels 17 camells per repartir en herència. Justament és la suma de les quantitats en què surten guanyant els germans: $1/2 + 1/3 + 1/9 = 17/18$.

- *Objectiu:* El desenvolupament d'estratègies de tempteig i de revisió de resultats finals i parcials. Caldrà desenvolupar l'enginy tot venent esforços infructuosos. Caldrà una revisió de les pròpies conclusions i dels propis càlculs.
- *Orientacions didàctiques:* L'alumne intentarà resoldre-ho rellegint l'enunciat i fent els càlculs pertinents. Posteriorment, els alumnes comentaran la resposta si ho han descobert per ells mateixos. Altrament, el professor els guiarà mitjançant preguntes adients. Es tracta de conduir el grup de manera que entre tots s'arribi a la solució amb una comprensió absoluta; l'explicació pot ser exposada pels alumnes mateixos (sempre supervisada pel professor).
- *Temporització:* Cinc minuts per pensar individualment i el temps necessari, en principi deu minuts, per solucionar-ho en grup.

Reflexions finals

El professor juga un paper rellevant en el procés d'aprenentatge de l'alumne, però a aquest no se li pot impedir el plaer de descobrir (Guzmán, 1992). Dubinsky (1996) confeccionà una llista a partir de les idees de Piaget en què proposava canviar el paper del mestre de disseminador d'informació a guia assistent. Tal com observen Chamoso i Rawson (2001), els estudiants aprenen quan divergeixen, pregunten, corregeixen, comproven, expliquen i generalitzen.

Com a resultat d'aquesta pràctica, s'obtenen diversos aprenentatges dels alumnes: adquisició o millora de l'hàbit de fer una llista exhaustiva i completa de totes les dades abans de co-

mençar a resoldre el problema (ho proven les resolucions escrites dels problemes d'exàmens posteriors) i un augment en la comprensió del que es pregunta induït per una lectura més atenta. També existeix una adquisició o millora de la revisió de la solució (entesa com Puig, 1996), una capacitat per tenir en compte diverses solucions d'un mateix problema i una voluntat d'entendre el sentit de la solució. Però cal dir que, tot i que ara la majoria escrigui les comprovacions pertinents com queda reflectit en les proves escrites, no significa que sàpiguen resoldre els problemes.

Referències

Abrantes, P., Serrazina, L. (1996). Matemática para todos (cap. 2). Cómo se aprende. Dins P. Abrantes i L. Serrazina, Lurdes, *A matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação. Departamento de Educação Básica.

Carrillo, J. (1996). *Creencias sobre la resolución de problemas. Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones*. Tesis doctoral. Universitat de Sevilla.

Chamoso, J.M., Rawson, W. (2001). En la búsqueda de lo importante en el aula de matemáticas. *Suma*, 36 (febrer), 33-41.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8(3), 24-41.

Guzmán, M. de (1992). Tendències innovadores en educació matemàtica. *Biaix*, 7 (setembre), 7-33.

Kilpatrick, J. (1985). A Retrospective Account of the Past 25 Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving. Dins E.A. Silver (ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (p. 1-15). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Mallart, A. (2008). *Estratègies de millora per a la resolució de problemes amb alumnes de segon d'ESO: ús de la matemàtica recreativa a les fases d'abordatge i de revisió*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma Barcelona.

Niss, M. (1999). Competencies and Subject Description. *Uddanneise*, 9, 21-29.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

Segarra, L. (2001). *Enigmes i jocs matemàtics*. Barcelona: Proa.

Webgrafia

Traducció realitzada per EDUTEKA de la secció corresponent a «Competencias en Matemáticas» del document *The PISA 2003 Assessment Framework* publicat per OCDE/PISA. <http://www.pisa.oecd.org>.

